Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

_____**магістра**_____
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему:
Про лінійну стабілізацію у критичному випадку

Виконав: студент(ка) групи МП61
II курсу (другий магістерський рівень),
спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва напряму підготовки, спеціальності)
_______ Прикладна математика________
(освітньо-професійна програма)
________Майструк В.А______________
(прізвище та ініціали)
Керівник: к. фіз.-мат. наук, доц. Бебія М.О
(прізвище та ініціали)
Рецензент: д. фіз.-мат. наук, проф. Коробов В.І.
(прізвище та ініціали)

Харків - 2022 рік

Анотація

Майструк В.А. Про лінійну стабілізацію у критичному випадку.

Роботу присвячено керуванню нелінійними системами у критичному випадку. А саме, розглядається задача лінійної стабілізації, що полягає у знаходженні стабілізуючого керування для нелінійної системи у вигляді лінійної функції. В роботі досліджуються спеціальний клас нелінійних систем, який інколи називають канонічними нелінійними системами зі степеневими нелінійностями. Для побудови розв'язку використано метод функції Ляпунова. Ідея цього методу полягає у знаходженні додатно визначеної функції, яка має від'ємно визначену похідну в силу системи в деякому околі нульової точки спокою. Ця властивість гарантує стійкість положення рівноваги системи. Запропоновано загальний підхід для дослідження n–вимірного випадку. Також більш детально розглянуто випадок тривимірної системи.

Abstract

Maistruk V.A. On linear stabilization in critical case.

The work is devoted to control of nonlinear systems in a critical case. Namely, we consider the problem of linear stabilization, which consists in finding a stabilizing control for the nonlinear system in the form of a linear function. The special class of nonlinear systems, which is sometimes called the canonical nonlinear systems with power nonlinearities, is studied in this work. We use the Lyapunov function method to construct the solution. This method is based on finding a positive-definite function that has a negative-definite derivative with respect to the system in some neighborhood of the zero-equilibrium point. This property guarantees stability of the equilibrium point of the system. A general approach studying to the n–dimensional case is proposed. The case of three-dimensional system is given more detailed consideration.

Зміст

1. Вступ

Задача стабілізації нелінійних систем у критичному випадку є важливою задачею нелінійної теорії керування [1,2,3,4,5]. Особливий інтерес викликають нелінійні системи, які не можна відобразити на лінійні [2,3,4,5]. Оскільки мова йде про критичний випадок, то не можна просто використати лінійне наближення для побудови стабілізуючих керувань, бо лінійне наближення не є стійким. Природнім є бажання будувати прості класи стабілізуючих керувань, наприклад, лінійні керування. Задачу побудови таких керувань називають задачею лінійної стабілізації.

Останні кілька десятиліть широке зацікавлення викликає клас систем вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + f_i(x_1, \dots, x_n),\ i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}. \end{cases} \tag{1}$$

При $p_i = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$ система (1) є канонічною лінійною керованою системою, питання стабілізації якої є добре вивченим та описаним в літературі [6, 7].

Нелінійний випадок, тобто випадок коли не всі $p_i = 1$, викликає великий інтерес. Зазначимо, що питання стабілізації таких систем не є до кінця розв’язаним та є предметом вивчення багатьох вчених [3, 4, 5]. Складність вивчення цього випадку полягає в тому, що система (1) в загальному випадку не є керованою за першим наближенням.

Задача гладкої стабілізації системи (1) у нелінійному випадку була досліджена в статті В.І. Коробова та М.О. Бебії [3]. А задача локальної асимптотичної стійкості системи (1) з лінійним керуванням вивчалася в статті Jiandong Zhu та Chunjiang Qian [5]. У цій статті доводиться наступна теорема:

Теорема 1. Розглянемо лінійне керування вигляду

$$u(x) = -k_1x_1 - k_2x_2 - \cdots - k_nx_n,$$

де $k_i \neq 0$ для кожного $i = 1, \dots, n$. Нехай p_i – це додатні непарні числа, що задовольняють умову $p_1 > p_2 > \cdots > p_n \geq 1$. Тоді положення рівноваги $x = 0$ системи (1) є локально асимптотично стійким в тому і тільки в тому випадку, коли $k_i > 0$ для кожного $i = 1, \dots, n$.

При цьому вимагалося, щоб функції $f_i(x_1, \dots, x_n)$ задовольняли умову

$$|f_i(x_1, \dots, x_n)| \leq \left(|x_{i+1}|^{p_i+\delta_i} + \cdots + |x_n|^{p_i+\delta_i}\right)\rho_i(x_1, \dots, x_n)$$

для деяких чисел $\delta_i > 0$ та деяких неперервних функцій $\rho_i(x_1, \dots, x_n) > 0$, $i = 1, \dots, n-1$.

Наприклад, для системи

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2^5, \\ \dot{x_2} = x_3^3, \\ \dot{x_3} = (-2x_1 - x_2 - x_3) \end{cases}$$

за теоремою 1 положення рівноваги $x = 0$ є локально асимптотично стійким.

Логічним виглядає питання про послаблення умови спадання степенів допускаючи можливість їх не зростання. Це питання і буде розглянуто у роботі.

2. Постановка задачі стабілізації

Розглянемо нелінійну систему такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i}, i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}, \end{cases} \tag{2}$$

де $p_i \in \mathbb{R}$ −відношення додатних непарних чисел для $i = 1, \dots, n$, u −керування.

Під задачею стабілізації системи (2) будемо розуміти задачу побудови неперервного керування $u(x)$ такого, що нульова точка спокою системи (2) при $u = u(x)$ є локально асимптотично стійкою.

Ми досліджуємо наступне питання: чи буде нульова точка спокою системи (2) асимптотично стійкою при $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$?

Наприклад, в роботі буде розглянута наступна тривимірна система

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2^{p_1}, \\ \dot{x_2} = x_3^{p_2}, \\ \dot{x_3} = (-k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3)^{p_3}, \end{cases}$$

де $p_i \in \mathbb{R}$ −відношення додатних непарних чисел, $k_i \in \mathbb{R}$ −деякі константи, для $i = 1, \dots, n$. Буде досліджено питання стійкості положення рівноваги $x = 0$ для $p_2 = p_3 = 1$. Крім того будуть знайдені додаткові умови на коефіцієнти k_1, k_2 та k_3, порівняно з випадком строгого спадання степенів, для локальної асимптотичної стійкості нульового розв’язку системи (2). Більше того, клас систем буде розширено за рахунок стабілізації за нелінійним наближенням.

3. Розв’язок задачі стабілізації для n–вимірної системи

Почнемо з загального випадку n–вимірної системи. Розглянемо лінійне керування вигляду

$$u(x) = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - \cdots - k_n x_n,$$

де $k_i > 0$ – деякі дійсні числа. Підставимо керування $u(x)$ в систему (2). Отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i}, i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = \left(-\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\right)^{p_n}. \end{cases} \quad (3)$$

Дослідимо нульову точку спокою системи (3) на асимптотичну стійкість, використовуючи метод функції Ляпунова. Асимптотична стійкість нульової точки спокою системи (3) при деяких додатних $k_i \in \mathbb{R}$ буде означати, що керування $u(x)$ розв’язує задачу лінійної стабілізації цієї системи.

Нагадаємо, що метод функції Ляпунова полягає у знаходженні додатно визначеної функції $V(x)$, похідна від якої в силу системи є від’ємно визначеною в деякому околі початку координат. Виконання цієї умови гарантує асимптотичну стійкість нульової точки спокою системи.

3.1. Побудова лінійного перетворення координат

Розглянемо наступне лінійне перетворення координат для системи (3)

$$e_i = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_i x_i, \ i = 1, \dots, n.$$

Обернене перетворення має вигляд:

$$x_1 = k_1^{-1} e_1, \ x_i = k_i^{-1}(e_i - e_{i-1}), \qquad i = 2, \dots, n.$$

В нових координатах система (3) запишеться як:

$$
\begin{cases}
\dot{e}_1 = \dfrac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2 - e_1)^{p_1}, \\
\dot{e}_i = \dfrac{k_i}{k_{i+1}^{p_i}}(e_{i+1} - e_i)^{p_i} + \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{k_j}{k_{j+1}^{p_j}}\left(e_{j+1} - e_j\right)^{p_j},\ i = 2, \dots, n-1, \\
\dot{e}_n = -k_n e_n^{p_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{k_j}{k_{j+1}^{p_j}}\left(e_{j+1} - e_j\right)^{p_j}.
\end{cases} \tag{4}
$$

3.2. Побудова функції Ляпунова

Розглянемо наступну функцію Ляпунова

$$V(e) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} l_i e_i^2 ,$$

де $l_i = k_{i+1}^{p_i} k_i^{-1},\ i = 1, \dots, n-1,\ l_n = k_n^{-1}$. Вочевидь, $V(e)$ є додатно визначеною функцією.

3.3. Обчислення похідної від функції Ляпунова

Знайдемо похідну від функції $V(e)$ в силу системи (4)

$$\dot{V}(e) = \frac{\partial V}{\partial e_1}\frac{de_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial e_2}\frac{de_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial e_3}\frac{de_3}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial e_n}\frac{de_n}{dt}.$$

Запишемо окремо кожен доданок:

$$\frac{\partial V}{\partial e_1}\frac{de_1}{dt} = \frac{k_2^{p_1}}{2k_1} 2e_1 \frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2 - e_1)^{p_1} = e_1(e_2 - e_1)^{p_1},$$

$$\frac{\partial V}{\partial e_2}\frac{de_2}{dt} = \frac{k_3^{p_2}}{2k_2} 2e_2 \left[\frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_2}}(e_3 - e_2)^{p_2}\right]$$

$$= e_2 \left[\frac{k_1 k_3^{p_2}}{k_2^{p_1+1}}(e_2 - e_1)^{p_1} + (e_3 - e_2)^{p_2}\right],$$

$$\frac{\partial V}{\partial e_3}\frac{de_3}{dt}=\frac{k_4^{p_3}}{2k_3}2e_3\left[\frac{k_3}{k_4^{p_3}}(e_4-e_3)^{p_3}+\frac{k_1}{k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1}+\frac{k_2}{k_3^{p_2}}(e_3-e_2)^{p_2}\right]=$$

$$=e_3\left[(e_4-e_3)^{p_3}+\frac{k_1k_4^{p_3}}{k_3k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1}+\frac{k_2k_4^{p_3}}{k_3^{p_2+1}}(e_3-e_2)^{p_2}\right],$$

$$\frac{\partial V}{\partial e_i}\frac{de_i}{dt}=\frac{k_{i+1}^{p_i}}{2k_i}2e_i\left[\frac{k_i}{k_{i+1}^{p_i}}(e_{i+1}-e_i)^{p_i}+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{k_j}{k_{j+1}^{p_j}}\left(e_{j+1}-e_j\right)^{p_j}\right]=$$

$$=e_i(e_{i+1}-e_i)^{p_i}+\frac{k_{i+1}^{p_i}}{k_i}e_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{k_j}{k_{j+1}^{p_j}}\left(e_{j+1}-e_j\right)^{p_j},i=2,\dots,n-1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial e_n}\frac{de_n}{dt}=\frac{1}{2k_n}2e_n\left[-k_ne_n^{p_n}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{k_j}{k_{j+1}^{p_j}}\left(e_{j+1}-e_j\right)^{p_j}\right]=$$

$$=-e_n^{p_n+1}+\frac{1}{k_n}e_n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{k_j}{k_{j+1}^{p_j}}\left(e_{j+1}-e_j\right)^{p_j}.$$

Отже, похідна виглядатиме наступним чином:

$$\dot{V}(e)=e_1(e_2-e_1)^{p_1}+e_2\left[\frac{k_1k_3^{p_2}}{k_2^{p_1+1}}(e_2-e_1)^{p_1}+(e_3-e_2)^{p_2}\right]+$$

$$+e_3\left[(e_4-e_3)^{p_3}+\frac{k_1k_4^{p_3}}{k_3k_2^{p_1}}(e_2-e_1)^{p_1}+\frac{k_2k_4^{p_3}}{k_3^{p_2+1}}(e_3-e_2)^{p_2}\right]+\cdots+$$

$$-e_n^{p_n+1}+\frac{1}{k_n}e_n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{k_j}{k_{j+1}^{p_j}}\left(e_{j+1}-e_j\right)^{p_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}e_i(e_{i+1}-e_i)^{p_i}-e_n^{p_n+1}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}e_il_i\frac{k_j}{k_{j+1}^{p_j}}\left(e_{j+1}-e_j\right)^{p_j}.$$

Нехай $\eta_{ij}=l_i\frac{k_j}{k_{j+1}^{p_j}},\ 1\le j<i\le n$. Тоді похідна матиме вигляд:

$$\dot{V}(e)=\sum_{i=1}^{n-1}e_i(e_{i+1}-e_i)^{p_i}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta_{ij}e_i\left(e_{j+1}-e_j\right)^{p_j}-e_n^{p_n+1}. \tag{5}$$

3.4. Оцінка похідної функції Ляпунова

Згідно методу функції Ляпунова дослідимо умови, при яких похідна від функції Ляпунова є від'ємно визначеною. Покладемо $\eta = \max\limits_{1\le j<i\le n}\left|\eta_{ij}\right|$ та оцінимо похідну $\dot{V}(e)$ зверху, використовуючи наступні леми [5]:

Лема 1: Для $p \ge 1$ та $x_i \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}$ виконується:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n|^p \le n^{p-1}(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p).$$

Лема 2: Для $p \ge 1$ −відношення додатних непарних чисел, виконується:

$$x(x+a)^p \ge 2^{1-p}x^{p+1} + xa^p,\ \forall x, a \in \mathbb{R}.$$

Звідси матимемо:

$$-e_i(e_i - e_{i+1})^{p_i} \le\ -2^{1-p_i}e_i^{p_i+1} + |e_{i+1}^{p_i}||e_i| \tag{6}$$

$$\eta e_i\left(e_{j+1} - e_j\right)^{p_j} \le\ \eta 2^{p_j-1}\left(\left|e_{j+1}^{p_i}\right||e_i| + |e_j^{p_j}||e_i|\right) \tag{7}$$

Тоді з отриманих оцінок випливає:

$$\dot{V}(e) \le \sum_{i=1}^{n-1}\left(-2^{1-p_i}e_i^{p_i+1} + \left|e_{i+1}^{p_i}\right||e_i|\right) - e_n^{p_n+1} +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}\left(\left|e_{j+1}^{p_i}\right||e_i| + |e_j^{p_j}||e_i|\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} -2^{1-p_i}e_i^{p_i+1} + \sum_{i=1}^{n-1}|e_{i+1}^{p_i}||e_i| - e_n^{p_n+1} +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}\left|e_{j+1}^{p_i}\right||e_i| + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}|e_j^{p_j}||e_i|.$$

Сформулюємо ще одну технічну лему, за допомогою якої оцінимо доданки з модулем.

Лема 3: Нехай $c\ і\ d$ − додатні числа. Тоді для будь-якого дійсного числа $\gamma > 0$ буде виконуватися наступне:

$$|x|^c|y|^d \leq \frac{c}{c+d}\gamma|x|^{c+d} + \frac{d}{c+d}\gamma^{-\frac{c}{d}}|y|^{c+d}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

За допомогою цієї леми отримуємо наступні оцінки:

$$|e_i|\left|e_{i+1}^{p_i}\right| \leq \frac{1}{1+p_i}\varepsilon_i e_i^{p_i+1} + \frac{p_i}{1+p_i}\varepsilon_i^{-\frac{1}{p_i}} e_{i+1}^{p_i+1} \leq \varepsilon_i e_i^{p_i+1} + \bar{A}_{\varepsilon_i}\ e_{i+1}^{p_i+1}, \qquad (8)$$

де $\bar{A}_{\varepsilon_i} = \frac{p_i}{1+p_i}\varepsilon_i^{-\frac{1}{p_i}}$, $\varepsilon_i > 0$;

$$\left|e_{j+1}^{p_j}\right|\,|e_i| \leq \tfrac{p_j}{1+p_j}\delta_j e_{j+1}^{p_j+1} + \tfrac{1}{1+p_j}\delta_j^{-p_j} e_i^{p_j+1} \leq \tfrac{p_j}{1+p_j}\delta_j e_{j+1}^{p_j+1} + \tfrac{1}{1+p_j}\delta_j^{-p_j} e_i^{p_j+1},$$

де $\delta_j > 0$;

$$\left|e_j^{p_j}\right|\,|e_i| \leq \frac{p_j}{1+p_j}\gamma_j e_j^{p_j+1} + \frac{1}{1+p_j}\gamma_j^{-p_j} e_i^{p_j} \leq \gamma_j e_j^{p_j+1} + \hat{A}_{\gamma_j}\ e_i^{p_j+1}, \qquad (9)$$

де $\hat{A}_{\gamma_j} = \frac{1}{1+p_j}\gamma_j^{-p_j}$, $\gamma_j > 0$.

Відмітимо, що в якості $\varepsilon_i, \delta_j, \gamma_j$ можна брати довільні додатні числа.

Отже, маємо таку оцінку похідної:

$$\dot{V}(e) \leq \sum_{i=1}^{n-1} -2^{1-p_i} e_i^{p_i+1} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\varepsilon_i e_i^{p_i+1} + \bar{A}_{\varepsilon_i} e_{i+1}^{p_i+1}\right) - e_n^{p_n+1} +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}\left(\frac{p_j}{1+p_j}\delta_j e_{j+1}^{p_j+1} + \frac{1}{1+p_j}\delta_j^{-p_j} e_i^{p_j+1}\right)$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}\left(\gamma_j e_j^{p_j+1} + \hat{A}_{\gamma_j} e_i^{p_j+1}\right).$$

Змінимо порядок сумування:

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}\gamma_j e_j^{p_j+1}=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\eta 2^{p_j-1}\gamma_j e_j^{p_j+1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\eta 2^{p_i-1}\gamma_i e_i^{p_i+1}=\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\gamma_i e_i^{p_i+1}, \qquad (10)$$

де $\xi_i=\eta 2^{p_i-1}$.

Тоді оцінка похідної запишеться наступним чином:

$$\dot{V}(e)\le \sum_{i=1}^{n-1}-2^{1-p_i}e_i^{p_i+1}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\varepsilon_i e_i^{p_i+1}+\bar{A}_{\varepsilon_i}e_{i+1}^{p_i+1}\right)-e_n^{p_n+1}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}\left(\frac{p_j}{1+p_j}\delta_j e_{j+1}^{p_j+1}+\frac{1}{1+p_j}\delta_j^{-p_j}e_i^{p_j+1}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\gamma_i e_i^{p_i+1}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}\hat{A}_{\gamma_j}e_i^{p_j+1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}(-2^{1-p_i}+\varepsilon_i+\xi_i\gamma_i)e_i^{p_i+1}-e_n^{p_n+1}+g(e_1,\dots,e_n),$$

де $g(e_1,\dots,e_n)=\sum_{i=1}^{n-1}\bar{A}_{\varepsilon_i}\,e_{i+1}^{p_i+1}+$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}\left(\frac{1}{1+p_j}\delta_j^{-p_j}+\hat{A}_{\gamma_j}\right)e_i^{p_j+1}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\eta 2^{p_j-1}\frac{p_j}{1+p_j}\delta_j e_{j+1}^{p_j+1}$$

– функція членів більш високого порядку.

Таким чином, при умові спадання степенів p_i, якщо параметри ε_i, γ_i достатньо малі додатні числа, то існує область $D\in\mathbb{R}$ околу початку координат, така що похідна $\dot{V}(e)$ від'ємно визначена на області D. Останнє виконується, бо коефіцієнти головної частини будуть від'ємними при досить малих ε_i, γ_i, а головна частина містить лише степені, які є відношенням парного та непарного чисел.

Якщо відмовитися від умови спадання степенів та допустити їх незростання, то у функції $g(e_1, \dots, e_n)$ будуть члени, які потрібно віднести до головної частини оцінки похідної. Це дасть нам додаткові умови на коефіцієнти k_i, окрім їх додатності. Враховуючи технічну складність дослідження цієї задачі, розглянемо випадок коли $p_n = p_{n-1}$. Тоді оцінка для похідної перетвориться на

$$\dot{V}(e) \le \sum_{i=1}^{n-1} (-2^{1-p_i} + \varepsilon_i + \xi_i \gamma_i) e_i^{p_i+1} + \Big(-1 + \bar{A}_{\varepsilon_{n-1}} +$$

$$+\eta 2^{p_{n-1}-1} \left(\frac{1}{1+p_{n-1}} \delta_{n-1}^{-p_{n-1}} + \hat{A}_{\gamma_{n-1}} \right) + \eta 2^{p_{n-1}-1} \frac{p_{n-1}}{1+p_{n-1}} \delta_{n-1} \Big) e_n^{p_n+1}$$

$$+g(e_1, \dots, e_n),$$

де

$$g(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^{n-2} \bar{A}_{\varepsilon_i} e_{i+1}^{p_i+1} + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \eta 2^{p_j-1} \left(\frac{1}{1+p_j} + \bar{A}_{\varepsilon_i} \right) e_i^{p_j+1} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-2} \eta 2^{p_j-1} \left(\frac{1}{1+p_j} + \hat{A}_{\gamma_j} \right) e_n^{p_j+1} + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \eta 2^{p_j-1} \frac{p_j}{1+p_j} \delta_j e_{j+1}^{p_j+1}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-2} \eta 2^{p_j-1} \frac{p_j}{1+p_j} \delta_j e_{j+1}^{p_j+1}$$

− функція членів більш високого порядку.

3.5. Умови на коефіцієнти стабілізуючого керування

Вимога від'ємної визначеності $\dot{V}(e)$ приводить нас до наступних нерівностей:

$$-2^{1-p_i} + \varepsilon_i + \xi_i \gamma_i < 0 \tag{11}$$

для $i = 1, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned} -1 + \bar{A}_{\varepsilon_{n-1}} + \eta 2^{p_{n-1}-1} \left(\frac{1}{1+p_{n-1}} \delta_{n-1}^{-p_{n-1}} + \hat{A}_{\gamma_{n-1}} \right) \\ + \eta 2^{p_{n-1}-1} \frac{p_{n-1}}{1+p_{n-1}} \delta_{n-1} < 0, \end{aligned} \tag{12}$$

де за (8), (9) та (10) величини $\bar{A}_{\varepsilon_{n-1}}$, $\hat{A}_{\gamma_{n-1}}$, ξ_{n-1} мають наступний вигляд

$$\bar{A}_{\varepsilon_{n-1}} = \frac{p_{n-1}}{1+p_{n-1}} \varepsilon_{n-1}^{-\frac{1}{p_{n-1}}}, \quad \hat{A}_{\gamma_{n-1}} = \frac{1}{1+p_{n-1}} \gamma_{n-1}^{-p_{n-1}}, \quad \xi_i = \eta 2^{p_i - 1}$$

для $i = 1, \ldots, n-1$. Тоді нерівність (12) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} -1 + \frac{p_{n-1}}{1+p_{n-1}} \varepsilon_{n-1}^{-\frac{1}{p_{n-1}}} + \eta 2^{p_{n-1}-1} \left(\frac{1}{1+p_{n-1}} \delta_{n-1}^{-p_{n-1}} + \frac{1}{1+p_{n-1}} \gamma_{n-1}^{-p_{n-1}} \right) \\ + \eta 2^{p_{n-1}-1} \frac{p_{n-1}}{1+p_{n-1}} \delta_{n-1} < 0. \end{aligned}$$

Спростимо останню нерівність:

$$\begin{aligned} \eta 2^{p_{n-1}-1} \left(\frac{1}{1+p_{n-1}} \delta_{n-1}^{-p_{n-1}} + \frac{1}{1+p_{n-1}} \gamma_{n-1}^{-p_{n-1}} + \frac{p_{n-1}}{1+p_{n-1}} \delta_{n-1} \right) \\ < 1 - \frac{p_{n-1}}{1+p_{n-1}} \varepsilon_{n-1}^{-\frac{1}{p_{n-1}}}, \end{aligned}$$

$$\eta 2^{p_{n-1}-1} \frac{\delta_{n-1}^{-p_{n-1}} + \gamma_{n-1}^{-p_{n-1}} + p_{n-1}\delta_{n-1}}{1+p_{n-1}} < 1 - \frac{p_{n-1}}{1+p_{n-1}} \varepsilon_{n-1}^{-\frac{1}{p_{n-1}}},$$

$$\eta 2^{p_{n-1}-1} < \frac{1 - \frac{p_{n-1}}{1+p_{n-1}} \varepsilon_{n-1}^{-\frac{1}{p_{n-1}}}}{\frac{\delta_{n-1}^{-p_{n-1}} + \gamma_{n-1}^{-p_{n-1}} + p_{n-1}\delta_{n-1}}{1+p_{n-1}}},$$

$$\eta 2^{p_{n-1}-1} < \frac{1 + p_{n-1}\left(1 - \varepsilon_{n-1}^{-\frac{1}{p_{n-1}}}\right)}{\delta_{n-1}^{-p_{n-1}} + \gamma_{n-1}^{-p_{n-1}} + p_{n-1}\delta_{n-1}},$$

$$\eta < \frac{1 + p_{n-1}\left(1 - \varepsilon_{n-1}^{-\frac{1}{p_{n-1}}}\right)}{2^{p_{n-1}-1}\left(\delta_{n-1}^{-p_{n-1}} + \gamma_{n-1}^{-p_{n-1}} + p_{n-1}\delta_{n-1}\right)}. \tag{13}$$

Розглянемо нерівність (11):

$$-2^{1-p_i} + \varepsilon_i + \eta 2^{p_i-1}\gamma_i < 0,$$

$$\eta 2^{p_i-1}\gamma_i < 2^{1-p_i} - \varepsilon_i,$$

$$\eta < \frac{2^{1-p_i} - \varepsilon_i}{2^{p_i-1}\gamma_i} \tag{14}$$

для $i = 1, \ldots, n-1$. Зрозуміло, що нерівність (14) буде виконуватися при доволі малих ε_i та γ_i.

Отже ми отримали такі умови на η:

$$\begin{gathered} \eta < \frac{1 + p_{n-1}\left(1 - \varepsilon_{n-1}^{-\frac{1}{p_{n-1}}}\right)}{2^{p_{n-1}-1}\left(\delta_{n-1}^{-p_{n-1}} + \gamma_{n-1}^{-p_{n-1}} + p_{n-1}\delta_{n-1}\right)}, \\ \eta < \frac{2^{1-p_i} - \varepsilon_i}{2^{p_i-1}\gamma_i} \end{gathered} \tag{15}$$

для $i = 1, \ldots, n-1$.

Очевидно, що інтерес викликає випадок коли $i = n-1$, тоді потрібно знайти ε_{n-1}, γ_{n-1}, δ_{n-1} так, щоб виконувались обидві з нерівностей (15). Для $i = 1, \ldots, n-2$ друга з нерівностей (15) очевидно буде виконуватися для досить малих ε_i, γ_i. В цілому, виконання нерівностей (15) забезпечують від’ємну визначеність похідної функції Ляпунова $\dot{V}(e)$ в деякому околі початку координат. Звідки можна зробити висновок про асимптотичну стійкість нульової точки спокою системи (4), а значить і системи (3) У наступному розділі питання розв’язування нерівностей (15) буде детально досліджено для тривимірної системи.

4. Дослідження тривимірної системи

Розглянемо випадок $\mathrm{n} = 3,\ p_2 = p_3 = 1.$ Отримаємо наступну тривимірну систему:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2^{p_1}, \\ \dot{x_2} = x_3, \\ \dot{x_3} = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3. \end{cases} \tag{16}$$

Дослідимо стійкість нульової точки спокою системи (16) згідно підходу розглянутого в розділі 3.

Отримаємо оцінку похідної (5) для цього випадку. Спочатку випишемо оцінки (6) та (7) для системи (16):

$$-e_1(e_1 - e_2)^{p_1} \leq -2^{1-p_1} e_1^{p_1+1} + \left|e_2^{p_1}\right||e_1|,$$

$$-e_2(e_2 - e_3) \leq -e_2^2 + |e_2||e_3|,$$

$$\frac{k_1 k_3}{k_2^{p_1+1}} e_2(e_2 - e_1)^{p_1} \leq \frac{k_1 k_3}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} e_2^{p_1+1} + \frac{k_1 k_3}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1}\left|e_1^{p_1}\right||e_2|,$$

$$\frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} e_3(e_2 - e_1)^{p_1} \leq \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1}\left|e_2^{p_1}\right||e_3| + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1}\left|e_1^{p_1}\right||e_3|,$$

$$\frac{k_2}{k_3^2} e_3(e_3 - e_2) \leq \frac{k_2}{k_3^2} e_3^2 + \frac{k_2}{k_3^2}|e_3||e_2|.$$

Тепер нам знадобляться наступні нерівності, що отримані аналогічно до нерівностей (8), (9):

$$\left|e_2^{p_1}\right||e_1| = \left|\frac{1}{C_1} e_2\right|^{p_1} \left|C_1^{p_1} e_1\right| \leq \frac{p_1}{(p_1+1) C_1^{p_1+1}} e_2^{p_1+1} + \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_1^{p_1+1},$$

$$\left|e_1^{p_1}\right||e_2| = \left|C_2^{p_1} e_1\right|^{p_1} \left|\frac{1}{C_2^{p_1^2}} e_2\right| \leq \frac{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_1^{p_1+1} + \frac{1}{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}} e_2^{p_1+1},$$

$$\left|e_2^{p_1}\right||e_3| = \left|\frac{1}{C_3} e_2\right|^{p_1} \left|C_3^{p_1} e_3\right| \leq \frac{p_1}{(p_1+1) C_3^{p_1+1}} e_2^{p_1+1} + \frac{C_3^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_3^{p_1+1},$$

$$\left|e_1^{p_1}\right||e_3| = \left|C_4^{p_1}e_1\right|^{p_1}\left|\frac{1}{C_4^{p_1^2}}e_3\right| \le \frac{p_1C_4^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_1^{p_1+1} + \frac{1}{(p_1+1)C_4^{p_1^2(p_1+1)}}e_3^{p_1+1},$$

$$|e_2||e_3| = \left|\frac{1}{C_5}e_2\right||C_5e_3| \le \frac{1}{2C_5^2}e_2^2 + \frac{C_5^2}{2}e_3^2,$$

де $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 -$ досить малі додатні величини.

З використанням отриманих оцінок, аналогічно до випадку n-вимірної системи, маємо:

$$\dot{V}(e) \le -2^{1-p_1}e_1^{p_1+1} + \frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}}e_2^{p_1+1} + \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_1^{p_1+1} - e_2^2 + \frac{1}{2C_5^2}e_2^2$$
$$+ \frac{C_5^2}{2}e_3^2 - e_3^2 + \frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}e_2^{p_1+1}$$
$$+ \frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_1^{p_1+1} + \frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}\frac{1}{(p_1+1)C_2^{p_1+1}}\ e_2^{p_1+1}$$
$$+ \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{p_1}{p_1+1}\frac{1}{C_3^{p_1+1}}e_2^{p_1+1} + \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{C_3^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_3^{p_1+1}$$
$$+ \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_4^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_1^{p_1+1} + \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{1}{(p_1+1)C_4^{p_1+1}}e_3^{p_1+1}$$
$$+ \frac{k_2}{k_3^2}e_3^2 + \frac{k_2}{4k_3^2C_5^2}e_2^2 + \frac{k_2C_5^2}{4k_3^2}e_3^2.$$

Перегрупуємо відповідні доданки та запишемо $\dot{V}(e)$ у наступному вигляді:

$$\dot{V}(e) \le e_1^{p_1+1}\left(-2^{1-p_1} + \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} + \frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}\right.$$
$$\left. + \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_4^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}\right)$$

$$+e_2^2\left(-1+\frac{1}{2C_5^2}+\frac{k_2}{4k_3^2C_5^2}\right)+e_3^2\left(-1+\frac{C_5^2}{2}+\frac{k_2}{k_3^2}+\frac{k_2C_5^2}{4k_3^2}\right)+g(x),$$

де функція $g(x)$ позначає доданки більш високого порядку та має вигляд:

$$g(x)=\frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}}e_2^{p_1+1}+\frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}e_2^{p_1+1}$$

$$+\frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}\frac{1}{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}}e_2^{p_1+1}+\frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{p_1}{p_1+1}\frac{1}{C_3^{p_1+1}}e_2^{p_1+1}$$

$$+\frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{C_3^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_3^{p_1+1}+\frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{1}{(p_1+1)C_4^{p_1^2(p_1+1)}}e_3^{p_1+1}.$$

Відповідно до методу функції Ляпунова будемо вимагати, щоб похідна $\dot{V}(e)$ була менша нуля. Для цього знайдемо умови від'ємності коефіцієнтів при парних степенях $e_1^{p_1+1},\ e_2^2,\ e_3^2$.

Почнемо з коефіцієнта при $-e_2^2$:

$$1-\frac{1}{2C_5^2}-\frac{k_2}{4k_3^2C_5^2}>0,$$

$$\frac{k_2}{4k_3^2C_5^2}<1-\frac{1}{2C_5^2},$$

$$\frac{k_2}{4k_3^2C_5^2}<\frac{2C_5^2-1}{2C_5^2},$$

$$\frac{k_2}{2k_3^2}<2C_5^2-1,$$

$$k_2<2k_3^2(2C_5^2-1). \qquad (17)$$

Перейдемо до коефіцієнта при $-e_3^2$:

$$1-\frac{C_5^2}{2}-\frac{k_2}{k_3^2}-\frac{k_2C_5^2}{4k_3^2}>0,$$

$$\frac{k_2}{k_3^2}+\frac{k_2C_5^2}{4k_3^2}<1-\frac{C_5^2}{2},$$

$$\frac{k_2(4+C_5^2)}{4k_3^2}<1-\frac{C_5^2}{2},$$

$$k_2(4+C_5^2)<4k_3^2\left(1-\frac{C_5^2}{2}\right),$$

$$k_2<\frac{4k_3^2-2k_3^2C_5^2}{4+C_5^2}. \qquad (18)$$

Дослідимо коефіцієнт при $-e_1^{p_1+1}$:

$$2^{1-p_1}-\frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}-\frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}-\frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_4^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}>0.$$

Зрозуміло, що для будь яких k_1, k_2 та k_3 існують доволі малі C_1, C_2, C_4, такі що коефіцієнт при $e_1^{p_1+1}$ буде від'ємним. Дійсно, визначимо функцию $r(C_1, C_2, C_4)$ наступним чином:

$$r(C_1,C_2,C_4)=\frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}+\frac{k_1k_3}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}+\frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}\frac{p_1C_4^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}.$$

Очевидно, що $r(C_1, C_2, C_4)$ є неперервною функцією та такою, для якої виконуються умова:

$$r(0)=0.$$

Отже, нерівність для коефіцієнту перед $-e_1^{p_1+1}$ має вигляд:

$$2^{1-p_1}-r(C_1,C_2,C_4)>0.$$

Як було заначено вище, C_1, C_2, C_4 –це досить малі величини. Тому за рахунок вибору C_1, C_2, C_4 можна зробити $r(C_1, C_2, C_4)$ меншою довільного наперед заданого числа ε: $\varepsilon \in (0; 2^{1-p_1})$. Тому для такого $\varepsilon > 0$, існує достатньо малий $\delta-$ окіл нуля $u_\delta(0)$ $(\delta > 0)$, такий що $r(C_1, C_2, C_4) \in u_\varepsilon(0)$ коли константа $\hat{C} = (C_1, C_2, C_4) \in u_\delta(0)$.

Отже, з умов на коефіцієнти k_1, k_2 та k_3 , що визначаються нерівностями (17) та (18), ми отримуємо такі обмеження:

$$\begin{cases} k_2 < 2k_3^2(2C_5^2 - 1), \\ k_2 < \dfrac{4k_3^2 - 2k_3^2C_5^2}{4 + C_5^2}\ , \\ k_1, k_2, k_3 - \text{ будь} - \text{які додатні числа.} \end{cases}$$

Нерівність (17) дає:

$$C_5^2 > \frac{2k_3^2 + k_2}{4k_3^2}.$$

А з нерівності (18) випливає:

$$C_5^2 < \frac{4k_3^2 - 4k_2}{k_2 + 2k_3^2}.$$

Звідки отримуємо умову, яку має задовольняти C_5^2:

$$\frac{2k_3^2 + k_2}{4k_3^2} < C_5^2 < \frac{4k_3^2 - 4k_2}{k_2 + 2k_3^2}.$$

Тоді

$$\frac{2k_3^2 + k_2}{4k_3^2} < \frac{4k_3^2 - 4k_2}{k_2 + 2k_3^2},$$

$$\frac{2k_3^2 + k_2}{4k_3^2} - \frac{4k_3^2 - 4k_2}{k_2 + 2k_3^2} < 0,$$

$$\frac{-12k_3^4 + 20k_3^2k_2 + k_2^2}{4k_3^2(k_2 + 2k_3^2)} < 0,$$

$$-12k_3^4 + 20k_3^2k_2 + k_2^2 < 0,$$

Далі нам знадобляться корені наступного рівняння:

$$-12k_3^4 + 20k_3^2k_2 + k_2^2 = 0,$$

$$t = k_3^2,$$

$$-12t^2 + 20tk_2 + k_2^2 = 0,$$

$$t = \frac{k_2\left(5 \pm 2\sqrt{7}\right)}{6}.$$

Оскільки $t = k_3^2$– додатне число, то $t = \frac{k_2\left(5+2\sqrt{7}\right)}{6}$. Звідки робимо висновок, що наша нерівність справедлива при $k_3^2 > \frac{k_2\left(5+2\sqrt{7}\right)}{6}$.

Згідно вище наведених міркувань, ми приходимо до наступної умови на коефіцієнти k_1, k_2 та k_3:

$$k_3^2 > \frac{k_2\left(5 + 2\sqrt{7}\right)}{6}, \tag{19}$$

де k_1, k_2, k_3 – додатні числа.

Останнє означає, що вимога не зростання степенів приводить до додаткової умови на коефіцієнти стабілізуючого керування, окрім їх додатності. Що відрізняє цей випадок від випадку строгого зростання степенів.

Приклад 1. Розглянемо задачу стабілізації для такої нелінійної системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^5 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \tag{20}$$

Тут $p_1 = 5, p_2 = p_3 = 1$.

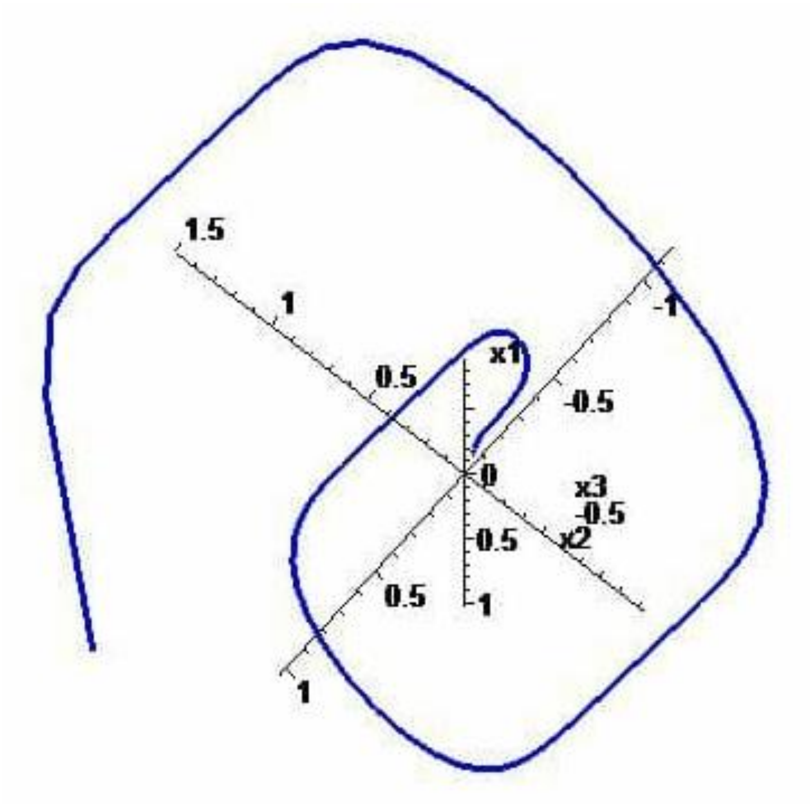
Оберемо додатні коефіцієнти k_1, k_2, k_3 довільним чином. Наприклад, $k_1 = -5, k_2 = -2, k_3 = -10$. Тоді лінійне стабілізуюче керування для системи (20) матиме вигляд $u = u(x)$, де

$$u(x) = -5x_1 - 2x_2 - 10x_3.$$

Зазначимо, що коефіцієнти k_i задовольняють умову (19). Звідки ми робимо висновок про асимптотичну стійкість нульової точки спокою системи (20) при $u = u(x)$.

Підставимо керування $u(x) = -5x_1 - 2x_2 - 10x_3$ в систему (20). Проілюструємо поведінку траєкторії замкнутої системи, наприклад, для початкових умов

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 1.$$



Траєкторія системи (20) при $u = u(x)$

4.1. Система з нелінійними доданками більш високого порядку

Отримані в розділі 4 результати можна узагальнити, розглянувши наступну нелінійну систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + \varphi_i(x_1, \dots, x_n), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}. \end{cases} \tag{21}$$

В якості стабілізуючого керування для системи (21) розглянемо таку ж саму функцію $u = u(x)$, що й для системи (2):

$$u(x) = -k_1 x_1 - \dots - k_n x_n,$$

де $k_i \in \mathbb{R}$ −деякі додатні константи, такі що $k_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ та $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ −неперервні функції для $i = 1, \dots, n-1$. Нехай керування $u(x)$ стабілізує систему (2). Будемо вимагати, щоб для функції $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ в околі початку координат виконувалася оцінка

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_n)| \leq \rho_i(x_1, \dots, x_n)\left(|x_{i+1}|^{p_i+\delta_i} + |x_{i+2}|^{p_i+\delta_i} + \dots + |x_n|^{p_i+\delta_i}\right)$$

для деяких неперервних функцій $\rho_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ та чисел $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Керування $u(x)$ справді стабілізує систему (21), так як функції $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ мають більш високий порядок порівняно з $x_{i+1}^{p_i}$. Тому ми можемо використовувати ту ж саму заміну змінних та функцію Ляпунова, що й для системи (3). Доведення цього результату майже повністю повторює міркування з розділу 3. Зауважимо, що члени більш високого порядку, які породжуються функціями $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, потрібно віднести до функції $g(x)$. Ці члени не вплинуть на знак похідної функції Ляпунова у досить малому околі нуля, оскільки мають більш високий порядок, ніж головна частина. Таким чином, можна сказати, що такий підхід є подібним до стабілізації за першим наближенням. Відмітимо, що система (2) використана в ролі нелінійного наближення системи (21). Тому, керування $u(x)$ стабілізує не тільки систему (2), а й систему (21).

Розглянемо тепер частковий випадок системи (21), поклавши $n = 3$, $p_1 > 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$. Отже, система матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{p_1} + \varphi_1(x_1, x_{2,}x_3), \\ \dot{x}_2 = x_3 + \varphi_2(x_1, x_{2,}x_3), \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{22}$$

За умови існування чисел $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ таких, що в околі початку координат виконані наступні оцінки для функцій $\varphi_1(x_1, x_{2,}x_3)$ та $\varphi_2(x_1, x_{2,}x_3)$:

$$|\varphi_1(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_1(x_1, x_2, x_3)\left(|x_2|^{p_1+\delta_1} + |x_3|^{p_1+\delta_1}\right),$$

$$|\varphi_2(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_2(x_1, x_2, x_3)|x_3|^{1+\delta_2}$$

при деяких неперервних $\rho_1(x_1, x_2, x_3) \geq 0$, $\rho_2(x_1, x_2, x_3) \geq 0$, маємо, що лінійне керування

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$$

стабілізує систему (22) при виконанні умови (19).

Проілюструємо цей підхід на наступному прикладі.

Приклад 2. Побудуємо стабілізуюче керування для наступної нелінійної системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^5 + x_2^6 \sin(x_1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_3^2 \cos(x_1), \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{23}$$

Використаємо систему (20) в якості нелінійного наближення системи (23). Тому систему (23) можна стабілізувати тим самим керуванням, що й систему (20).

Отже, розглянемо керування $u = u(x)$, де

$$u(x) = -5x_1 - 2x_2 - 10x_3.$$

Оскільки для $k_1 = 5$, $k_2 = 2$, $k_3 = 10$, $p_1 = 5$ виконується умова (19), покладемо $\rho_1(x_1, x_2, x_3) = 1$, $\rho_2(x_1, x_2, x_3) = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$. Тоді зрозуміло, що для функцій $\varphi_1(x_1, x_{2,}x_3) = x_2^6 \sin(x_1 + x_2)$ та $\varphi_2(x_1, x_{2,}x_3) = x_3^2 \cos(x_1)$ справедливі оцінки:

$$|\varphi_1(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_1(x_1, x_2, x_3)\left(|x_2|^{p_1+\delta_1} + |x_3|^{p_1+\delta_1}\right) = x_2^6 + x_3^6,$$

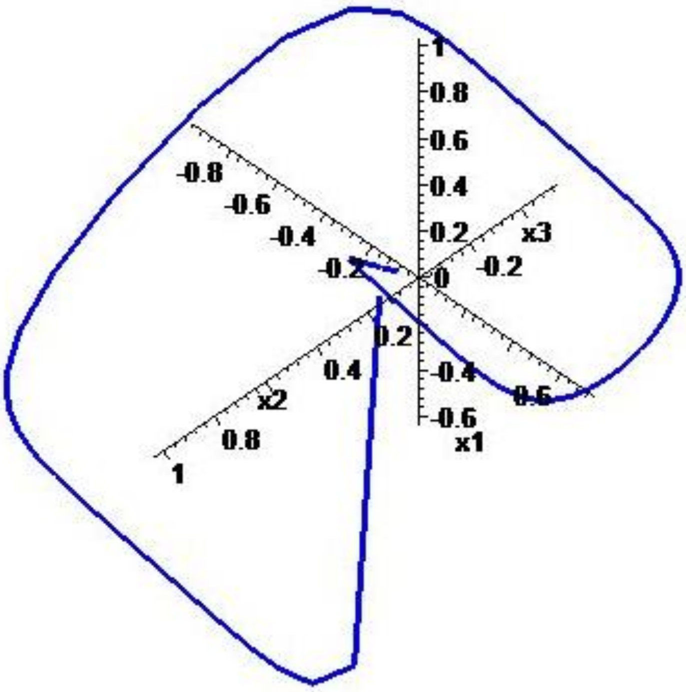
$$|\varphi_2(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_2(x_1, x_2, x_3)|x_3|^{1+\delta_2} = x_3^2$$

у всьому просторі $\mathbb{R}^3$.

Виходячи з результатів роботи, можна зробити висновок, що нульова точка спокою системи (23) при $u = u(x)$ є асимптотично стійкою. А саме, як було показано вище, оскільки керування $u(x)$ стабілізує систему нелінійного наближення (20), то воно стабілізує і вихідну нелінійну систему (23) з доданками більш високого порядку.

Для демонстрації поведінки розв'язків замкнутої обраним лінійним керуванням системи (23) побудуємо траєкторію, наприклад, для таких початкових умов:

$$x_1(0) = 0.8, x_2(0) = 0.7, x_3(0) = 1.$$



Траєкторія системи (23)

5. Висновки

У цій роботі була досліджена задача стабілізації деякого спеціального класу n–вимірних нелінійних систем. Розглянутий клас систем являє з себе канонічну систему з степеневими нелінійностями та доданками більш високого порядку та не є керованим за першим наближенням. Розвинуто конструктивний метод побудови стабілізуючих керувань для випадку не зростання степенів, який ґрунтується на методі функції Ляпунова. При цьому було використано спеціальну заміну змінних, яка зводить систему до більш зручного вигляду, після чого функцію Ляпунова було знайдено як суму квадратів. Доведено, що подібно до випадку строгого спадання степенів можна знаходити стабілізуюче керування у вигляді лінійної функції. Показано, що на відміну від випадку строгого спадання степенів з'являються додаткові умови на коефіцієнти керування, окрім їх від'ємності, які забезпечують локальну асимптотичну стійкість положення рівноваги $x = 0$.

Запропонований загальний підхід було використано для детального дослідження широкого класу тривимірних нелінійних систем. Також для демонстрації ефективності запропонованого підходу було проведено чисельне дослідження поведінки траєкторій конкретного прикладу тривимірної системи з використанням пакету Maple 17.

Клас досліджуваних систем було розширено за рахунок стабілізації за нелінійним наближенням. Якщо розглянути вихідні нелінійні системи з доданками більш високого порядку в правій частині, то такі системи можна стабілізувати тим же самим лінійним керуванням, використавши ту ж саму функцію Ляпунова. Що також було проілюстровано відповідним прикладом.

Список використаних джерел

1. A. Isidori, Nonlinear Control Systems (3rd ed.) // Berlin: Springer, 1995, 282 p.

2. H.K. Khalil, Nonlinear Systems // Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall, 2002, 750 p.

3. M.O. Bebiya, V.I. Korobov, On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2016, Vol. 12, No. 2, P. 113–133.

4. W. Lin, C. Qian, Adding One Power Integrator: A Tool for Global Stabilization of High-Order Lower-Triangular Systems // Systems & Control Letters, 2000,Vol. 39, No. 5, P. 339-351.

5. Jiandong Zhu, Chunjiang Qian, A Necessary and Sufficient Condition for Local Asymptotic Stability of a Class of Nonlinear Systems in the Critical Case // Automatica, Vol. 96, 2018, P. 234-239.

6. Перестюк О.С., Чернікова М.О., Теорія стійкості // Київ : Київський національний університет, 2002, 57 с.

7. Roger W. Brocket, Finite Dimensional Linear Systems // John Wiley and Sons, 1970, 244 p.